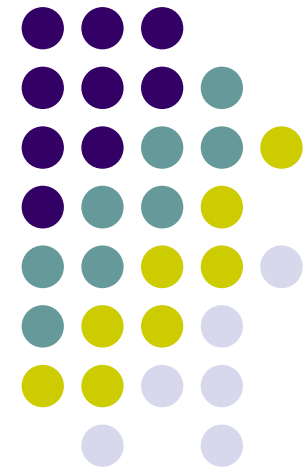


Lekcija 2: *Ograničenja na performanse MIMO sistema*

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

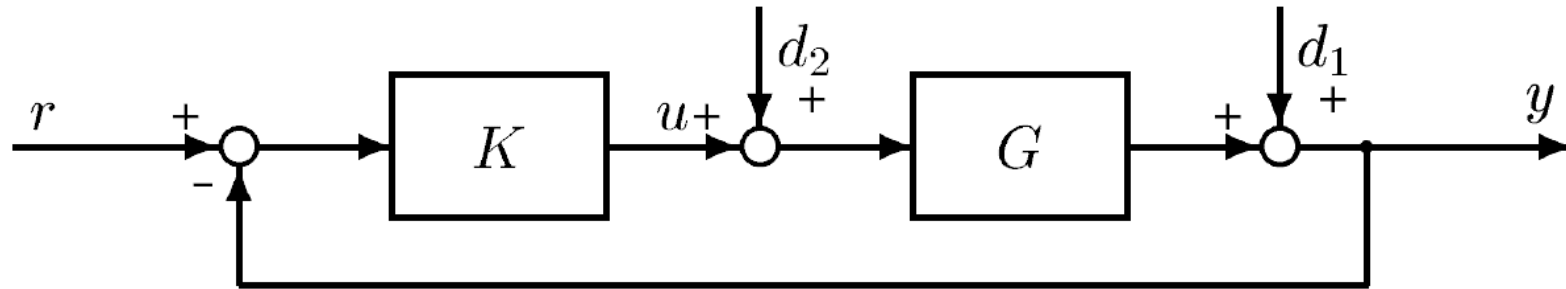
Kolegij: Multivarijabilni sistemi

2012/2013



MIMO sistem

Prikaz MIMO sistema



- Pojačanje petlje: na izlazu $L = GK$, na ulazu $L_I = KG$
- Osjetljivost i komplementarna osjetljivost na izlazu:

$$S = (I + L)^{-1}, \quad T = L(I + L)^{-1}$$

$$e = Sr - Sd_1 - SGd_2 - Tn$$

- Osjetljivost i komplementarna osjetljivost na ulazu:

$$S_I = (I + L_I)^{-1}, \quad T_I = L_I(I + L_I)^{-1} \quad u = -T_I d_2$$

Performanse MIMO sistema



- Svi promatrani signali su sinusoidni po ω i koriste 2-normu za amplitudu: $\|\mathbf{y}(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^l |y_i|^2}$
- Nadalje imamo za $\mathbf{y} = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}$:

$$\underline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)) \leq \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \leq \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$$

- Ograničenje na pogrešku za referentni ulaz \mathbf{r} i smetnju na izlazu \mathbf{d}_1 :

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) \leq \frac{1}{|w_P(j\omega)|}, \quad \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad \|w_P \mathbf{S}\|_\infty \leq 1$$

- Za šum:
$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) \leq \frac{1}{|w_T(j\omega)|}, \quad \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad \|w_T \mathbf{T}\|_\infty \leq 1$$

Performanse MIMO sistema

- Za generalizirani MIMO proces $\mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{P}, \mathbf{K})\mathbf{w}$ imamo:

$$\max_{\omega} \max_{\mathbf{w}(\omega)} \frac{\|\mathbf{z}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{w}(\omega)\|_2} = \max_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{F}(j\omega)) = \|\mathbf{F}\|_{\infty}$$

- U vremenskoj domeni H_{∞} norma jednaka je induciranoj 2-normi za bilo koji vremenski signal:

$$\|\mathbf{F}\|_{\infty} = \max_{\mathbf{w}(t) \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{z}(t)\|_2}{\|\mathbf{w}(t)\|_2}$$

- **Problem kod MIMO sistema:** djelovanja poremećaja, promjena parametara procesa, RHP polova, RHP nula i kašnjenja iskazana su vektorima pravaca koji ih opisuju, te je teško razmatrati odvojeno učinke nekih od njih.





Ograničenja na S i T

Ograničenje 1. $S + T = I$

- Na osnovu Fanovog teorema:

$$\sigma_i(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \sigma_i(A+B) \leq \sigma_i(A) + \bar{\sigma}(B)$$

i identiteta $S + T = I$ slijedi:

$$\begin{aligned} |1 - \bar{\sigma}(T)| &\leq \bar{\sigma}(S) \leq 1 + \bar{\sigma}(T) \\ |1 - \bar{\sigma}(S)| &\leq \bar{\sigma}(T) \leq 1 + \bar{\sigma}(S) \end{aligned}$$

- Za bilo koju frekvenciju ω :
 - nije moguće da su istovremeno $\bar{\sigma}(S)$ i $\bar{\sigma}(T)$ mali.
 - $\bar{\sigma}(T) \gg 1 \iff \bar{\sigma}(S) \gg 1$

Ograničenja na S i T

SISO sistemi

- Veza osjetljivosti i komplementarne osjetljivosti:

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1, \quad \forall \omega$$

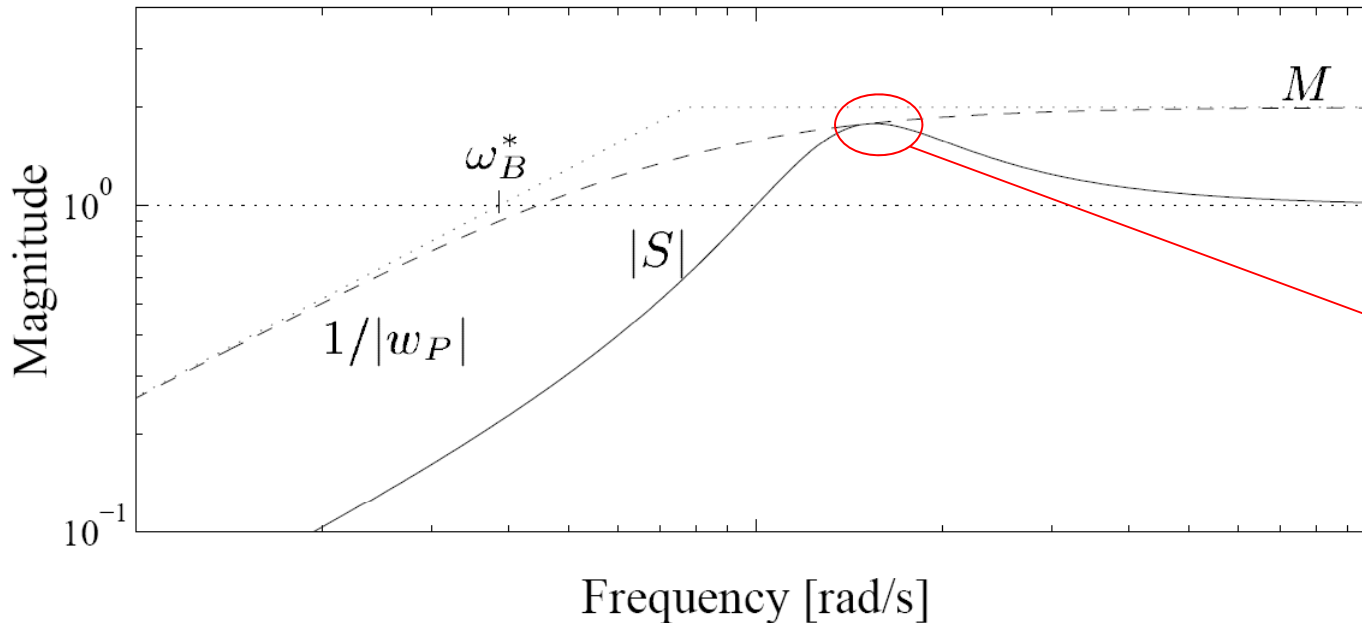
- Slijedi za bilo koji ω :
 - $|S(j\omega)| > 0.5$ ili $|T(j\omega)| > 0.5$; nije moguće efikasno djelovati u slučaju istovremenog djelovanja poremećaja i mjernog šuma na istoj frekvenciji.
 - $|S(j\omega)| \gg 1 \Leftrightarrow |T(j\omega)| \gg 1$; pojačanje djelovanja poremećaja povlači za sobom povećanje amplitude šuma, i obratno.



Ograničenja na S i T

SISO sistemi – efekt vodenog duška

- Grafički prikaz funkcije osjetljivosti



Nepoželjno da vršna vrijednost od $|S|$ bude veća od 1.

- **Efekt vodenog duška: potiskivanje (smanjenje) osjetljivosti ($|S|$) na jednoj frekvenciji uzrokuje njeno povećanje na drugoj frekvenciji.**
- Kompromis između smanjenja i povećanja osjetljivosti: **dvije formule vodenog duška.**



Ograničenja na S i T

SISO sistemi – efekt vodenog duška

- **Prva formula:** $L(s)$ ima najmanje dva pola više od nula (polni višak ≥ 2) – **Bodeov integral osjetljivosti.**
- **Druga formula:** $L(s)$ ima RHP-nule – **otežani integral osjetljivosti.**
- Sa prethodne slike:
 - Frekvencije za koje je $|S(j\omega)| < 1$ povratna veza poboljšava performanse.
 - Frekvencije za koje je $|S(j\omega)| > 1$ povratna veza narušava performanse.

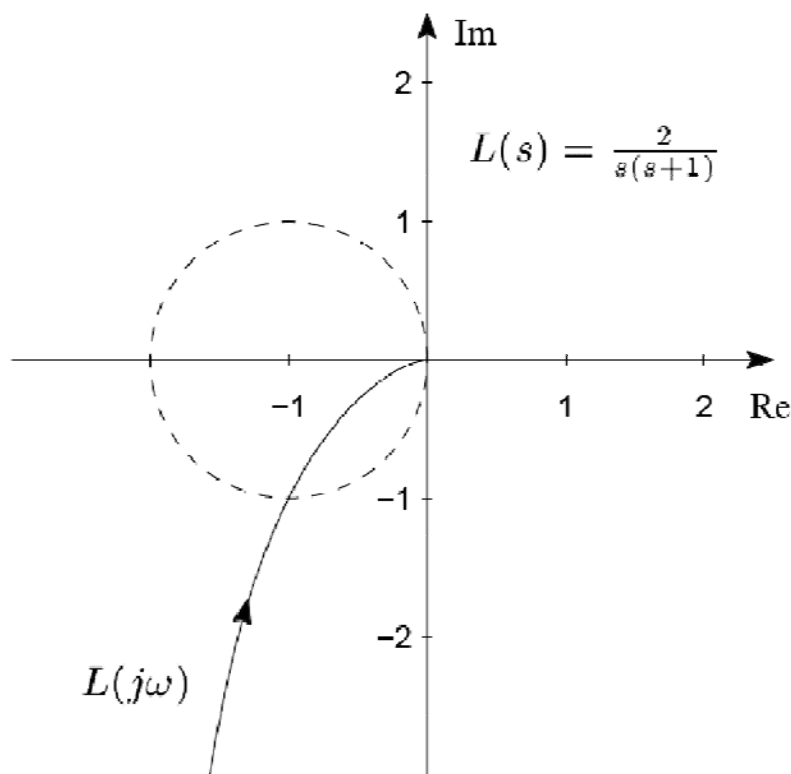




Ograničenja na S i T

SISO sistemi – polni višak ≥ 2

- Pretpostavka: $L(s)$ je stabilna i ima polni višak ≥ 2 , tada je rastojanje između $L(j\omega)$ i -1 manje od 1 za neke frekvencije ω .



$$|1 + L(j\omega)| < 1 \Leftrightarrow$$

$$|S(j\omega)| = |1 + L(j\omega)|^{-1} > 1$$

Postojat će uvijek neko frekvencijsko područje unutar kojeg će:

$$|S| > 1$$

Ovo je kvantificirano **Bodeovim integralom osjetljivosti**.

$|S| > 1$ za dio Nyquistovog dijagrama od L koji je unutar jediničnog kruga.

Ograničenja na S i T

- **Teorem 1. Bodeov integral osjetljivosti (prva formula vodenog duška).** Pretpostavimo da $L(s)$ ima elemente čiji su polni viškovi najmanje 2 i N_p RHP polova p_i .
- Za stabilnost zatvorenog sistema funkcija osjetljivosti mora zadovoljavati uvjet:

$$\int_0^{\infty} \ln |\det \mathcal{S}(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(p_i)$$

$\det(\mathcal{S}(s))$ je funkcija osjetljivosti sa $\det(\mathcal{S}(\infty))=1$.

- Kod SISO sistema (Bodeov integral osjetljivosti):

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(p_i)$$





Ograničenja na S i T

- Za prethodni izraz je esencijalno da je $\det(\mathcal{S}(s))$ funkcija osjetljivosti sa $\det(\mathcal{S}(\infty)) = 1$.
- Primjenom Jensenove formule dobiva se prethodni izraz.
- Nadalje, za bilo koju kvadratnu matricu može se pisati:

$$|\det \mathcal{S}| = \prod_i \sigma_i(\mathcal{S})$$

odnosno:

$$\sum_i \int_0^\infty \ln(\sigma_i(\mathcal{S}(j\omega))) d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(p_i)$$

- Mora se načiniti trade-off između frekvencija jednako kao i između pravaca vektora sistema.

Ograničenja na S i T

- **Stabilan SISO sistem:**

$$\int_0^{\infty} \ln|S(j\omega)| d\omega = 0$$

područje smanjenja osjetljivosti ($\ln|S|$ negativno) mora biti jednako području povećanja osjetljivosti ($\ln|S|$ pozitivno).

- **Nestabilan SISO sistem:** Prisustvo nestabilnih polova povećava vršnu vrijednost osjetljivosti S , što slijedi iz:

$$\pi \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(p_i)$$

- Područje povećanja osjetljivosti ($\ln|S| > 1$) premašuje područje smanjenja osjetljivosti za iznos proporcionalan sumi udaljenosti nestabilnih polova od lijeve poluravnine – **problem stabilizacije sistema.**





Ograničenja na S i T

Ograničenje 2. *Integrali osjetljivosti sa utjecajem RHP nula*

SISO sistem

- Sistem

$$y = Gu + G_d d$$

sa perfektnim unaprijednim upravljanjem $y = r$:

$$u = G^{-1}r - G^{-1}G_d d$$

- **Perfektно unaprijedno upravljanje korespondira sa invertiranjem G .**
- Upravljanje sa povratnom vezom:

$$u = K_S r - K_S G_d d$$

sa $T = GKS$

$$u = G^{-1}Tr - G^{-1}TG_d d$$

Ograničenja na S i T

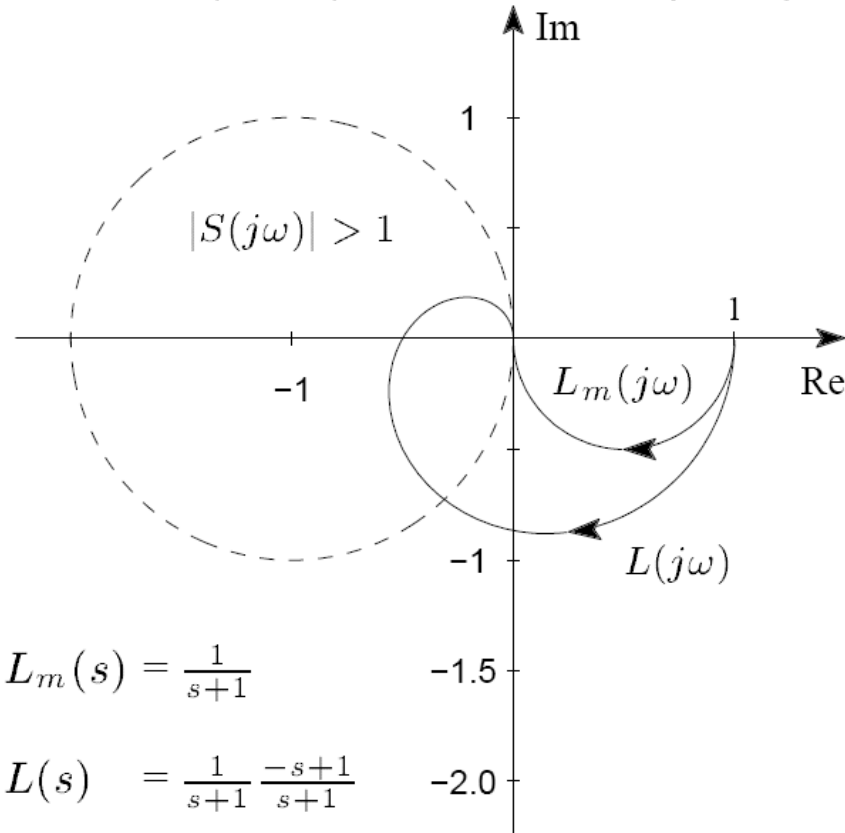
- Visoka vrijednost pojačanja sistema sa povratnom vezom daje $T \approx 1$, to jest povratna veza generira inverziju od G , čak i sa jednostavnim regulatorom K .
- Perfektno upravljanje zahtijeva inverziju modela $G(s)$ koju nije moguće postići u sljedećim slučajevima:
 - **$G(s)$ ima RHP nule ($G^{-1}(s)$ nestabilan, interna nestabilnost).**
 - **$G(s)$ sadrži vremensko kašnjenje ($G^{-1}(s)$ zahtijeva predikciju).**
 - **$G(s)$ striktno pravilna ($G^{-1}(s)$ nepravilna).**
- Može se očekivati ograničenja od strane RHP nula i vremenskih kašnjenja.
- Nepravilnost se može često popraviti dodavanjem visokofrekvencijskih polova.



Ograničenja na S i T



- Utjecaj RHP nula (druga formula) za SISO sistem:



RHP nula povećava fazno zaostajanje, $L(j\omega)$ bliži -1 u trećem kvadrantu, povećava se $|S|$.

Dodatna nula i pol u $L(s)$ uzrokuju da Nyquistov dijagram prodire u jedinični krug što dovodi do toga da **funkcija osjetljivosti bude veća od 1** ($|S| > 1$).

- Problem vršne vrijednosti funkcije osjetljivosti za procese sa RHP nulama** – potrebno zadovoljavanje i dodatnog integrala (druga formula) koji ima strožije implikacije na vršnu vrijednost od S .

Ograničenja na S i T

- **Teorem 2. Otežani integral osjetljivosti (druga formula vodenog dušeka).** Pretpostavimo da $L(s)$ ima pojedinačnu RHP nulu z ili par konjugirano-kompleksnih nula $z = x \pm jy$, i N_p RHP polova p_i . Neka \bar{p}_i predstavlja konjugirano kompleksni pol od p_i . Da bi zatvoreni sistem bio stabilan, funkcija osjetljivosti mora zadovoljavati:

$$\int_0^{\infty} \ln|S(j\omega)| \cdot w(z, \omega) d\omega = \pi \cdot \ln \prod_{i=1}^{N_p} \left| \frac{p_i + z}{p_i - z} \right|$$

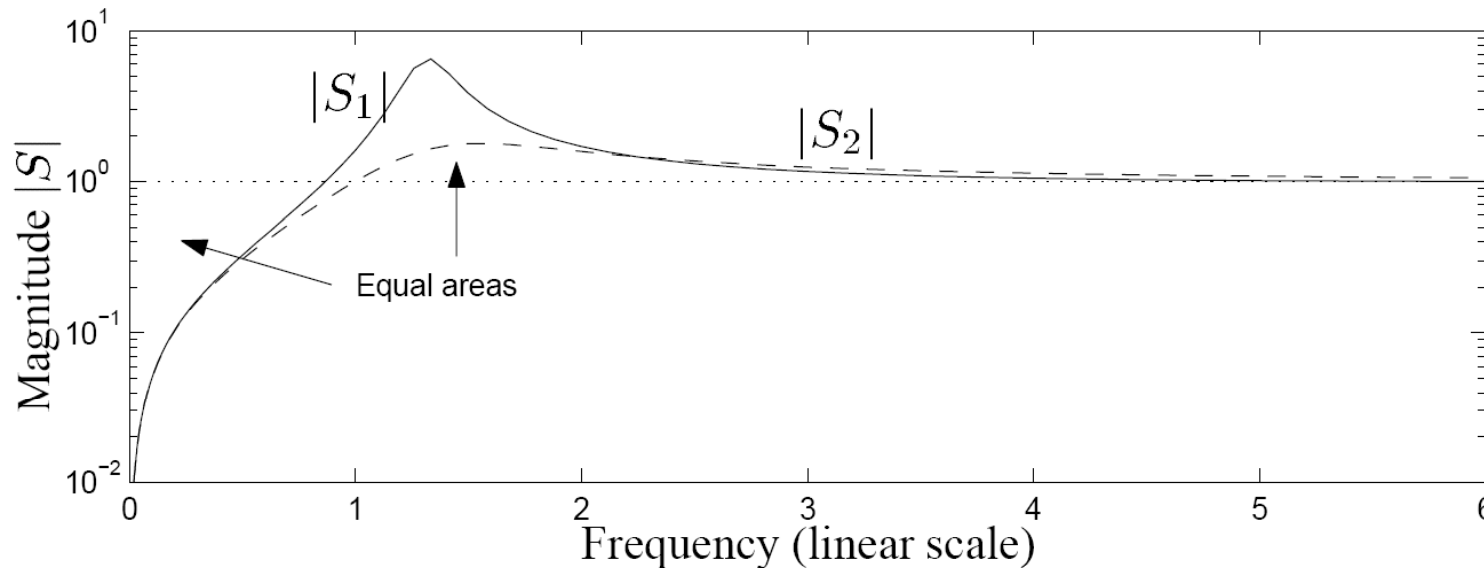
U slučaju realne nule: $w(z, \omega) = \frac{2z}{z^2 + \omega^2} = \frac{2}{z} \frac{1}{1 + (\omega/z)^2}$

Ako je nula $z = x \pm jy$: $w(z, \omega) = \frac{x}{x^2 + (y - \omega)^2} + \frac{x}{x^2 + (y + \omega)^2}$

Ograničenja na S i T

- **Primjer 1.** Utjecaj RHP nule na osjetljivost S .

$$L_1(s) = \frac{2}{s(s+1)}; \quad L_2(s) = L_1 \frac{-s+5}{s+5}$$



$$S = \frac{1}{1+L}$$

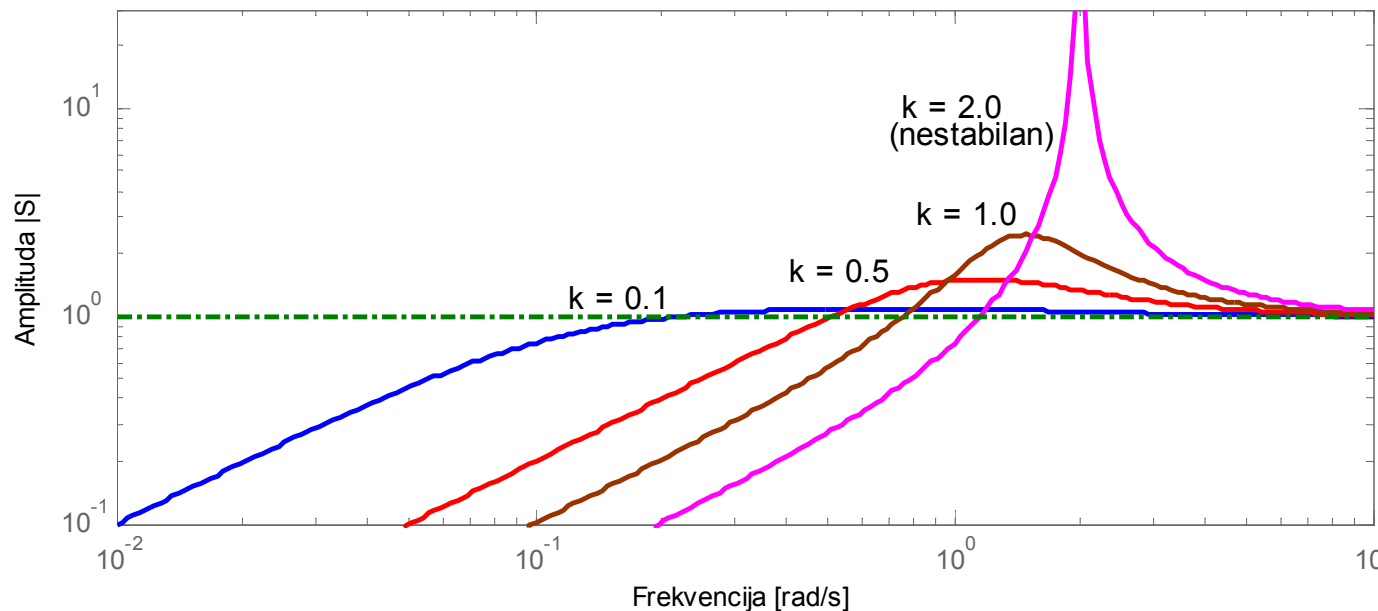
- U oba slučaja područja od $\ln S$ ispod i iznad 1 su jednaka, što slijedi iz $\int_0^\infty \ln|S(j\omega)|d\omega = 0$, ali za L_2 ovo se mora desiti na frekvencijama ispod $z = 5$ ($\int_0^z \ln|S(j\omega)|d\omega \approx 0$) i vršna vrijednost od S mora biti veća.



Ograničenja na S i T

- **Primjer 2.** Utjecaj povećanja koeficijenta pojačanja regulatora na $|S|$ za sistem sa RHP nulom:

$$L(s) = \frac{k}{s} \frac{2-s}{2+s}$$



Za $k = 2$ sistem postaje nestabilan sa dva pola na imaginarnoj osi i vršnom vrijednošću koja teži ka ∞ .

- **Povećanje pojačanja regulatora k korespondira sa širim propusnim opsegom, što rezultira većom vršnom vrijednošću od S .**



Ograničenja na S i T

MIMO sistem – pravac vektora nula

- Ako je z nula od $G(s)$, tada $G(s)$ gubi rang u $s = z$ i postoje ne-nulti vektori \mathbf{u}_z i \mathbf{y}_z takvi da je $G(z)\mathbf{u}_z = \mathbf{0} \cdot \mathbf{y}_z$, ili:

$$G(z)\mathbf{u}_z = \mathbf{0}; \quad \mathbf{y}_z^H G(z) = \mathbf{0}$$

\mathbf{u}_z i \mathbf{y}_z nazivaju se vektorima ulaznih i izlaznih pravaca nula.

- Iz SVD-a od $G(z) = U\Sigma V^H$, $\mathbf{u}_z = \underline{\mathbf{v}}$ i $\mathbf{y}_z = \underline{\mathbf{u}}$ korespondira sa:

$$\underline{\sigma} = 0$$

to jest \mathbf{u}_z i \mathbf{y}_z sa pojačanjem jednakim nuli.



Ograničenja na S i T

MIMO sistem – pravac vektora polova

- Ako je p pol od $G(s)$, tada je:

$$G(p)u_p = \infty \cdot y_p$$

u_p i y_p nazivaju se vektorima ulaznih i izlaznih pravaca polova.

- Iz SVD-a od $G(p) = U\Sigma V^H$, $u_p = \bar{v}$ i $y_p = \bar{u}$ korespondira sa:

$$\bar{\sigma} = \infty$$

to jest u_p i y_p sa pojačanjem jednakim ∞ .

Ograničenja na S i T

Primjer 3. Zadana je funkcija prijenosa $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s-1} & s+7 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

- U RHP: pol $s = 1$, nula $z = 2$.
- SVD od $G(1+\varepsilon)$:

$$U(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

slijedi:

$$\mathbf{u}_p = [-1 \ 0]^T, \quad \mathbf{y}_p = [-1 \ 0]^T$$



Ograničenja na S i T

- SVD od $G(2)$:

$$U(s) = \begin{bmatrix} -0.95 & -0.31 \\ -0.31 & 0.95 \end{bmatrix}, \quad \Sigma(s) = \begin{bmatrix} 3.33 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V(s) = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.95 \\ -0.95 & 0.32 \end{bmatrix}$$

slijedi: $u_z = [-0.95 \quad 0.32]^T$, $y_z = [-0.31 \quad 0.95]^T$

- **MIMO sistemi mogu imati polove i nule na istim lokacijama koje se ne poništavaju zbog različitih pravaca, npr.:**

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s-1} \end{bmatrix}$$



Ograničenja na S i T

- Polovi MIMO sistema mogu se pomicati povratnim vezama:

$$(I + GK)^{-1}$$

- Nule se mogu pomjerati paralelnim vezama:

$$G + K$$



Ograničenja na S i T

Ograničenje 3. Interpolacijska ograničenja

SISO sistem

$$T = \frac{GK}{1+GK}; \quad S = \frac{1}{1+GK}$$

- Ako je z RHP nula od G tada:

$$T(z) = 0; \quad S(z) = 1$$

- Ako je p RHP pol tada:

$$T(p) = 1; \quad S(p) = 0$$

- Ova interpolacijska ograničenja slijede iz zahtjeva interne stabilnosti (poništenje polova i nula u RHP):

$$G(z) = 0 \Rightarrow L(z) = 0 \Leftrightarrow T(z) = 0; S(z) = 1$$

$$G^{-1}(p) = 0 \Rightarrow L(p) = \infty \Leftrightarrow T(p) = 1; S(p) = 0$$



Ograničenja na S i T

MIMO sistem

- Ako $G(s)$ ima RHP nulu z sa izlaznim pravcem y_z , tada se za internu stabilnost zahtijeva:

$$y_z^H T(z) = \mathbf{0}; \quad y_z^H S(z) = y_z^H$$

- Ovo slijedi iz:

$$y_z^H L(z) = \mathbf{0} \Rightarrow y_z^H T(z) = \mathbf{0} \Rightarrow y_z^H (I - S) = \mathbf{0}$$

- Prema tome:
 - $T(s)$ mora zadržati (sačuvati) RHP nulu i pravac nule u $G(s)$.
 - Esencijalno, $S(z) = \mathbf{0}$ u pravcu nula izlaza.



Ograničenja na S i T

MIMO sistem

- Ako $G(s)$ ima RHP pol p sa izlaznim pravcem y_p , tada za internu stabilnost zahtijeva se:

$$S(p)y_p = \mathbf{0}; \quad T(p)y_p = y_p$$

- Ovo slijedi iz:

$$L^{-1}(p)y_p = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad S = TL^{-1}$$

- Prema tome:
 - $S(s)$ mora imati RHP nule gdje $G(s)$ ima RHP polove,
 - Esencijalno, $T(p) = I$ u smjeru nula izlaza.





Ograničenja na S i T

Ograničenje 4. *Vršne vrijednosti osjetljivosti*

SISO sistem

- Iz Teorema 1. \Rightarrow RHP nula implicira da je vršna vrijednost od $|S|$ neizbježna i da će se taj vrh povećati ako se smanji $|S|$ na drugim frekvencijama.
- **Ograničenje na otežanu vršnu vrijednost od S mnogo je korisnije u primjenama od relacija izraženih integralom.**
- Rezultati se zasnivaju na **interpolacijskim ograničenjima** $S(z) = 1$ i $T(p) = 1$ i primjeni **principa maksimalnih modula** za kompleksne analitičke funkcije [Churchill et al., 1974].
- Vršna vrijednost = H_∞ norma:

$$\max_{\omega} |f(j\omega)| = \|f(s)\|_{\infty}$$



Ograničenja na S i T

- **Princip maksimuma modula.** Pretpostavimo da je $f(s)$ stabilna funkcija, tj. analitička u kompleksnoj RHP. Tada se maksimalna vrijednost od $|f(s)|$ za s u RHP nalazi na granici stabilnosti, odnosno negdje duž $j\omega$ osi. Slijedi da za stabilnu $f(s)$ imamo:

$$\|f(j\omega)\|_{\infty} = \max_{\omega} |f(j\omega)| \geq \|f(s_0)\|_{\infty}, \quad \forall s_0 \in \text{RHP}$$

- **Primjer 4.** Za sistem sa RHP nulom imamo $S(z) = 1$ iz čega slijedi:

$$\max_{\omega} |S(j\omega)| = \|S\|_{\infty} \geq 1$$

- Ovo nije previše korisno. Poželjnije je promatrati **otežanu osjetljivost**, tj. zahtjev $|S| < 1$ u nekom frekvencijskom intervalu.

Ograničenja na S i T

- Uvodimo izraze za otežanu osjetljivost i otežanu komplementarnu osjetljivost:

$$f(s) = w_P(s)S(s); \quad f(s) = w_T(s)T(s)$$

- Za proces s RHP nulom z , primjenom principa maksimuma modula za $f(s) = w_P(s)S(s)$ i korištenjem interpolacijskog ograničenja $S(z) = 1$ dobiva se:

$$\|w_P S\|_{\infty} \geq |w_P(z)S(z)| = |w_P(z)|$$

- Ako proces ima RHP polove tada je granica velika, što je dano sljedećim teoremom.

Ograničenja na S i T

- Teorem 3. Vršna vrijednost otežane osjetljivosti.**
 Za stabilnost zatvorenog sistema funkcija otežane osjetljivosti mora zadovoljavati za svaku RHP nulu z :

$$\|w_P S\|_{\infty} \geq |w_P(z)| \cdot \prod_{i=1}^{N_p} \frac{|z + p_i|}{|z - p_i|}$$

gdje p_i označava RHP pol od G .

- Ako G nema RHP polove tada je granica:

$$\|w_P S\|_{\infty} \geq |w_P(z)|$$

- Funkcija otežane komplementarne osjetljivosti mora zadovoljavati za svaki RHP pol p :

$$\|w_T T\|_{\infty} \geq |w_T(p)| \cdot \prod_{j=1}^{N_z} \frac{|z_j + p|}{|z_j - p|}$$



Ograničenja na S i T

gdje z_i označava RHP nulu od G .

- Ako G nema RHP nula tada je granica:

$$\|w_T T\|_\infty \geq |w_T(p)|$$

- Za dokazivanje navedenog teorema:

Napisati:

$$S = S_m S_a; \quad S_a = \prod \frac{s - p_i}{s + p_i}$$

za $w_P = 1$ i $w_T = 1$

$$\|S\|_\infty \geq \prod_{i=1}^{N_p} \frac{|z_j + p_i|}{|z_j - p_i|}; \quad \|T\|_\infty \geq \prod_{j=1}^{N_z} \frac{|z_j + p_i|}{|z_j - p_i|}$$

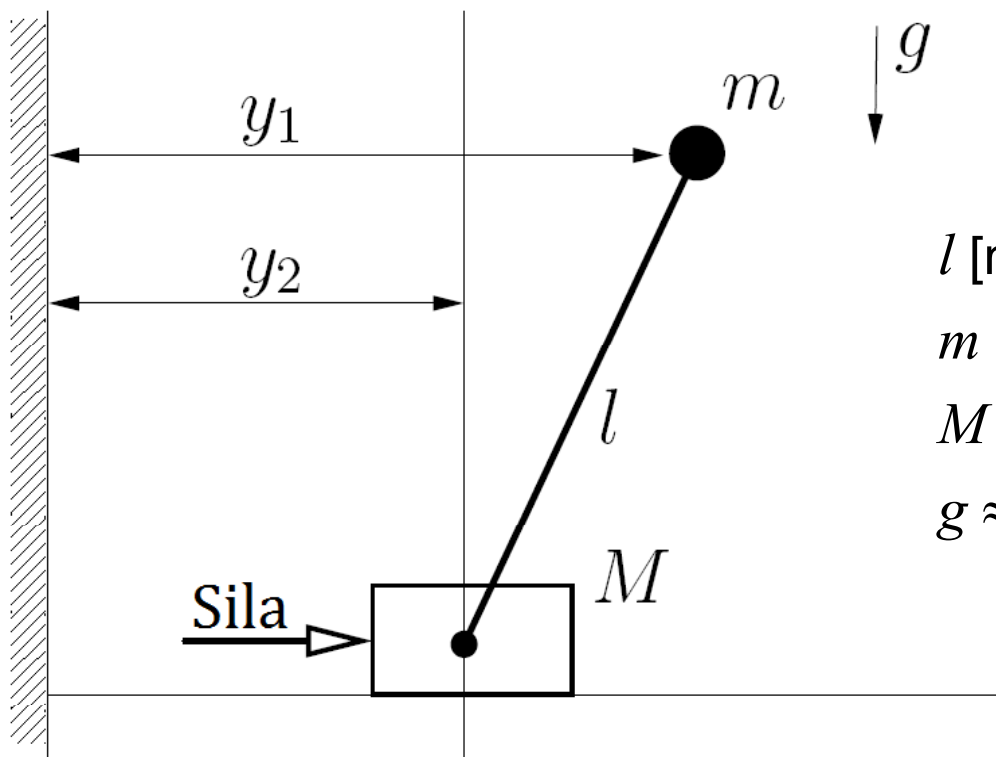
Velike vršne vrijednosti $|S|$ i $|T|$ ne mogu se izbjeći ako su polovi i nule blizu jedni drugima u RHP-u.

Ograničenja na S i T

- **Primjer 5.** Balansiranje štapa. Cilj je držati štap u gornjem položaju dok se kreću kolica na temelju observacije pozicije vrha štapa y_1 ili pozicije kolica y_2 .



32/87



l [m] = duljina štapa,
 m [kg] = masa štapa,
 M [kg] = masa kolica,
 $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ = gravitacijsko ubrzanje.

Ograničenja na S i T



- Linearizirane funkcije prijenosa:

$$G_1(s) = \frac{-g}{s^2 (Mls^2 - (M+m)g)}; \quad G_2(s) = \frac{ls^2 - g}{s^2 (Mls^2 - (M+m)g)}$$

- Polovi: $p = 0, 0, \pm \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}$
- Za izlaz $y_1(G_1(s))$ stabilizacija zahtijeva minimalan propusni opseg:

$$\omega_{BT}^* > p \frac{M_T}{M_T - 1}, \quad \text{za } M_T = 2 \Rightarrow \omega_{BT}^* > 2p$$

- Za izlaz $y_2(G_2(s))$ nula je $z = \sqrt{\frac{g}{l}}$.
 - Za lagan štap $m \ll M$, pol \approx nula \Rightarrow “nemoguće” stabilizirati.
 - Za teži štap (m velik) teško stabilizirati zbog $p > z$.
- Npr. $m/M = 0.1 \Rightarrow \|S\|_\infty \geq 42; \|T\|_\infty \geq 42 \Rightarrow$ slabo upravljanje.

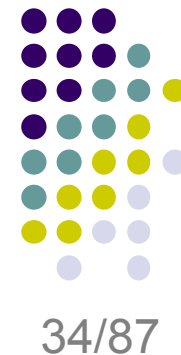
Ograničenja na S i T

MIMO sistem

- Korištenjem interpolacijskih ograničenja izvedene su donje granice na otežane funkcije osjetljivosti.
- Vršna vrijednost od $\bar{\sigma}(S)$ veća od 1 je neizbježna ako proces ima RHP nulu, kao i vršna vrijednost od $\bar{\sigma}(T)$ ako proces ima RHP pol.
- Promatrajmo proces $G(s)$ sa RHP polovima p_i i RHP nulama z_j i faktorizirajmo $G(s)$ u smislu Blaschke produkata:

$$G(s) = B_p^{-1}(s)G_s(s), \quad G(s) = B_z(s)G_m(s)$$

gdje su G_s i G_m stabilna i minimalno-fazna verzija od G . $B_p(s)$ i $B_z(s)$ su stabilne matrice prijenosa, kod kojih su sve singularne vrijednosti jednake 1 za $s=j\omega$, koje sadrže RHP polove i RHP nule.



Ograničenja na S i T

- $B_p(s)$ dobiva se faktorizacijom u odnosu na jedan izlazni RHP pol u vremenu, startajući sa:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}_{p_1}^{-1}(s) \mathbf{G}_{p_1}(s)$$

gdje je $\mathbf{B}_{p_1}^{-1}(s) = \mathbf{I} + \frac{2 \operatorname{Re}\{p_1\}}{s - p_1} \hat{\mathbf{y}}_{p_1} \hat{\mathbf{y}}_{p_1}^H$ i $\hat{\mathbf{y}}_{p_1} = \mathbf{y}_{p_1}$ je izlazni pravac pola p_1 .

- Navedena procedura ponavlja se za ostale polove, tako se za p_2 starta sa $\mathbf{G}_{p_1}(s)$, gdje je $\hat{\mathbf{y}}_{p_2}$ smjer izlaznog pola od \mathbf{G}_{p_1} .
- Identična procedura se koristi za RHP nule.
- Na temelju opisanih procedura imamo:

$$\mathbf{B}_p^{-1}(s) = \prod_{i=1}^{N_p} \left(\mathbf{I} + \frac{2 \operatorname{Re}\{p_i\}}{s - p_i} \hat{\mathbf{y}}_{p_i} \hat{\mathbf{y}}_{p_i}^H \right), \quad \mathbf{B}_z^{-1}(s) = \prod_{j=1}^{N_z} \left(\mathbf{I} + \frac{2 \operatorname{Re}\{z_j\}}{s - z_j} \hat{\mathbf{y}}_{z_j} \hat{\mathbf{y}}_{z_j}^H \right)$$

Ograničenja na S i T

- Teorem 4. Otežana osjetljivost.** Pretpostavimo da $G(s)$ ima RHP nulu $s = z$. Neka $w_P(s)$ predstavlja stabilnu skalarnu težinu. Tada za stabilnost zatvorenog sistema funkcija otežane osjetljivosti mora zadovoljavati:

$$\|w_P(s)S(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \bar{\sigma}(w_P S(j\omega)) \geq |w_P(z)|$$

- Teorem 5. Otežana komplementarna osjetljivost.** Pretpostavimo da $G(s)$ ima RHP pol $s = p$. Neka $w_T(s)$ predstavlja stabilnu skalarnu težinu. Tada za stabilnost zatvorenog sistema funkcija otežane komplementarne osjetljivosti mora zadovoljavati:

$$\|w_T(s)T(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \bar{\sigma}(w_T T(j\omega)) \geq |w_T(p)|$$

Ograničenja na S i T

- Teorem 6. Vršne vrijednosti osjetljivosti MIMO sistema (polovi i nule).** Pretpostavimo da $G(s)$ ima N_z RHP nula z_j sa izlaznim pravcima \mathbf{y}_{z_j} i N_p RHP polova p_i sa izlaznim pravcima \mathbf{y}_{p_i} . Tada se mogu izračunati realne konstante:

$$c_{1j} = \left\| \mathbf{y}_{z_j}^H \mathbf{B}_p(z_j) \right\|_2 \geq 1; \quad c_{2i} = \left\| \mathbf{B}_z^{-1}(p_i) \mathbf{y}_{p_i} \right\|_2 \geq 1$$

Neka je $w_P(s)$ stabilna težina, tada za stabilnost zatvorenog sistema otežana funkcija osjetljivosti mora za svaku RHP nulu z_j zadovoljavati:

$$\left\| w_P \mathbf{S} \right\|_\infty \geq c_{1j} \left| w_P(z_j) \right|$$

Slijedi da je $c_{1j} = 1$ ako G nema RHP polove.

Ograničenja na S i T

Neka je $w_T(s)$ stabilna težina, tada za stabilnost zatvorenog sistema otežana funkcija komplementarne osjetljivosti mora za svaki RHP pol p_i zadovoljavati:

$$\|w_T \mathbf{T}\|_{\infty} \geq c_{2i} |w_T(p_i)|$$

Slijedi da je $c_{2i} = 1$ ako \mathbf{G} nema RHP nule.



Ograničenja na S i T

- Teorem 7. Vršne vrijednosti osjetljivosti MIMO sistema (kombinirani polovi i nule).** Promatrajmo racionalnu $G(s)$ sa N_z odvojenih RHP nula i N_p odvojenih RHP polova sa korespondentnim izlaznim pravcima \mathbf{y}_{zj} i \mathbf{y}_{pj} . Tada se mogu primijeniti sljedeće donje granice:

$$\min_k \|S\|_\infty = \min_k \|T\|_\infty = \sqrt{1 + \bar{\sigma}^2 \left(\mathbf{Q}_z^{-1/2} \mathbf{Q}_{zp} \mathbf{Q}_p^{-1/2} \right)}$$

gdje su: $[\mathbf{Q}_z]_{ij} = \frac{\mathbf{y}_{zi}^H \mathbf{y}_{zj}}{z_i + \bar{z}_j}$, $[\mathbf{Q}_p]_{ij} = \frac{\mathbf{y}_{pi}^H \mathbf{y}_{pj}}{\bar{p}_i + p_j}$, $[\mathbf{Q}_{zp}]_{ij} = \frac{\mathbf{y}_{zi}^H \mathbf{y}_{pj}}{z_i - p_j}$

- Potrebno je pažljivo računati granice za bilo koji broj RHP polova i nula.
- Minimalne vršne vrijednosti ovise o udaljenosti između z i p jednako kao i o poravnanju njihovih pravaca (nema ometanja ako su pravci ortogonalni).



Ograničenja na \mathbf{S} i \mathbf{T}

- Za sistem $\mathbf{G}(s)$ sa jednim RHP polom p i jednom RHP nulom z slijedi:

$$\min_k \|\mathbf{S}\|_\infty = \min_k \|\mathbf{T}\|_\infty = \sqrt{\sin^2 \phi + \frac{|z+p|^2}{|z-p|^2} \cos^2 \phi}$$

gdje je: $\phi = \cos^{-1} \left| \mathbf{y}_z^H \mathbf{y}_p \right|$

- **Primjer 6.** promatrajmo sistem iz primjera 3.

$$z = 2, \quad \mathbf{y}_z = \begin{bmatrix} -0.31 & 0.95 \end{bmatrix}^T, \quad p = 1, \quad \mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

što daje $\phi = 1.25$ rad i $\min_k \|\mathbf{S}\|_\infty = \min_k \|\mathbf{T}\|_\infty = 1.1$

- Za SISO sistem ($p = 1$ i $z = 2$):

$$\min_k \|\mathbf{S}\|_\infty = \min_k \|\mathbf{T}\|_\infty = 1.73 \quad (\phi = 0)$$

Ograničenja na S i T

- Ograničenje:

$$\mathbf{y}_z^H \mathbf{T}(z) = \mathbf{0}$$

nameće samo l ograničenja za l^2 elemenata $T_{ij}(s)$ od $\mathbf{T}(s)$, tako da postoje određena sloboda u kojoj se elementi $T_{ij}(s)$ mogu ograničiti kako bi se zadovoljila interpolacijska ograničenja.

- **Primjer 7.** Promatrajmo sistem koji ima RHP nulu z i

$$\mathbf{y}_z = \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0.95 \end{bmatrix}$$

- Na temelju prethodnog izraza $\mathbf{y}_z^H \mathbf{T}(z) = \mathbf{0}$ slijedi:

$$-0.32T_{11}(z) + 0.95T_{21}(z) = 0 \quad \wedge \quad -0.32T_{12}(z) + 0.95T_{22}(z) = 0$$

Ograničenja na S i T

- **Raspregnuto upravljanje:**

$$T_{12}(s) = T_{21}(s) = 0 \implies T_{11}(z) = T_{22}(z) = 0$$

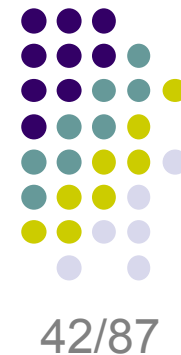
tj. RHP nula pojavljuje se na oba izlaza.

- **Perfektno upravljanje** u odnosu na izlaz y_1 :

$$T_{11}(s) = 1 \wedge T_{12}(s) = 0 \implies T_{22}(z) = 0$$

tj. RHP nula pojavljuje se samo na izlazu y_1 .

- Efekt RHP nule z može se pomjeriti samo na one izlaze čiji su korespondentni elementi usmjereni u pravcu nule $y_{z,i} \neq \mathbf{0}$.
- RHP nula z sa elementima $y_{z,i} = \mathbf{0}$ naziva se **zabodena nula** (engl. pinned), tj. ona je učvršćena na izlaze sa $y_{z,i} \neq \mathbf{0}$.



Funkcionalna upravljivost

- Promatra se proces $G(s)$ sa l izlaza, čiji je rang r .
- Za neovisno upravljanje svim izlazima mora se zahtijevati $r = l$, tj. proces mora biti funkcionalno upravljiv.
- **Definicija 1. Funkcionalna upravljivost.** Sistem sa m ulaza i l izlaza opisan funkcijom prijenosa $G(s)$ je funkcionalno upravljiv ako je normalni rang od $G(s)$, označen sa r , jednak broju izlaza l , to jest ako $G(s)$ ima puni rang:
 - Sistem sa m ulaza i l izlaza, gdje je $m < l$, je funkcionalno neupravljiv ako vrijedi $r \leq m < l$.
 - Sistem opisan kvadratnom funkcijom prijenosa $G(s)$, dimenzija $n \times n$, je funkcionalno neupravljiv ako je $\det G(s) = 0$, tj. $G(s)$ je singularna za sve s .



Funkcionalna upravljivost

- Proces je funkcionalno neupravljiv ako (i samo ako) je $\sigma_l(\mathbf{G}(j\omega)) = 0$.
- Mjera koliko je proces upravljanja funkcionalno neupravljiv je razmatranje $\sigma_l(\mathbf{G}(j\omega))$ (kada je $m \geq l$ tada imamo minimum singularne vrijednosti $\underline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$)
- Ako je proces funkcionalno neupravljiv ($r < l$) tada postoji $l - r$ pravaca vektora izlaza \mathbf{y}_0 na koje se ne može utjecati.
- Ovi pravci se mijenjaju s promjenom frekvencije i vrijedi:

$$\mathbf{y}_0^H(j\omega)\mathbf{G}(j\omega) = \mathbf{0}$$

- Na temelju SVD od $\mathbf{G}(j\omega) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$ slijedi da su neupravljivi izlazni vektori $\mathbf{y}_0(j\omega)$ zadnji $l-r$ stupci od $\mathbf{U}(j\omega)$.



Funkcionalna upravljivost

- Analizom ovih vektora dizajner sistema može odlučiti da li je prihvatljivo držati određenu kombinaciju ovih vektora neupravljivom, ili ako su potrebni dodatni aktuatori da povećaju rang matrice $G(s)$.
- **Primjer 8.** Promatrajmo proces koji je singularan, odnosno funkcionalno neupravljiv:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} & \frac{4}{s+2} \end{bmatrix}$$

- Neupravljivi izlazni vektori y_0 na niskim i visokim frekvencijama su:

$$y_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y_0(\infty) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ograničenja nametnuta vrem. kašnjenjem



SISO sistem

- Promatramo proces $G(s)$ sa vremenskim kašnjenjem $e^{-\theta s}$ bez RHP nula.
- Za skokovitu pobudu $r(t)$, potrebno je čekati vrijeme θ dok se ne postigne perfektno upravljanje.
- Perfektno upravljanje je oblika [Morrari, Zafiriou, 1989]:

$$T(s) = \prod_i \frac{-s + z_j}{s + z_j} e^{-\theta s}$$

- Idealan odziv $y = Tr$, gdje je $r(t)$ jedinična skokovita pobuda, vrijedi i za stabilne procese sa RHP nulama z_j (realne ili kompleksne) i vremenskim kašnjenjem θ .
- “Idealan” regulator – minimizira ISE: $ISE = \int_0^{\infty} |y(t) - r(t)| dt$

Ograničenja nametnuta vrem. kašnjenjem



- Iz prethodnog izraza može se zaključiti da je “idealna” funkcija komplementarne osjetljivosti $T = e^{-s\theta}$.

- Korespondentna “idealna” funkcija osjetljivosti je:

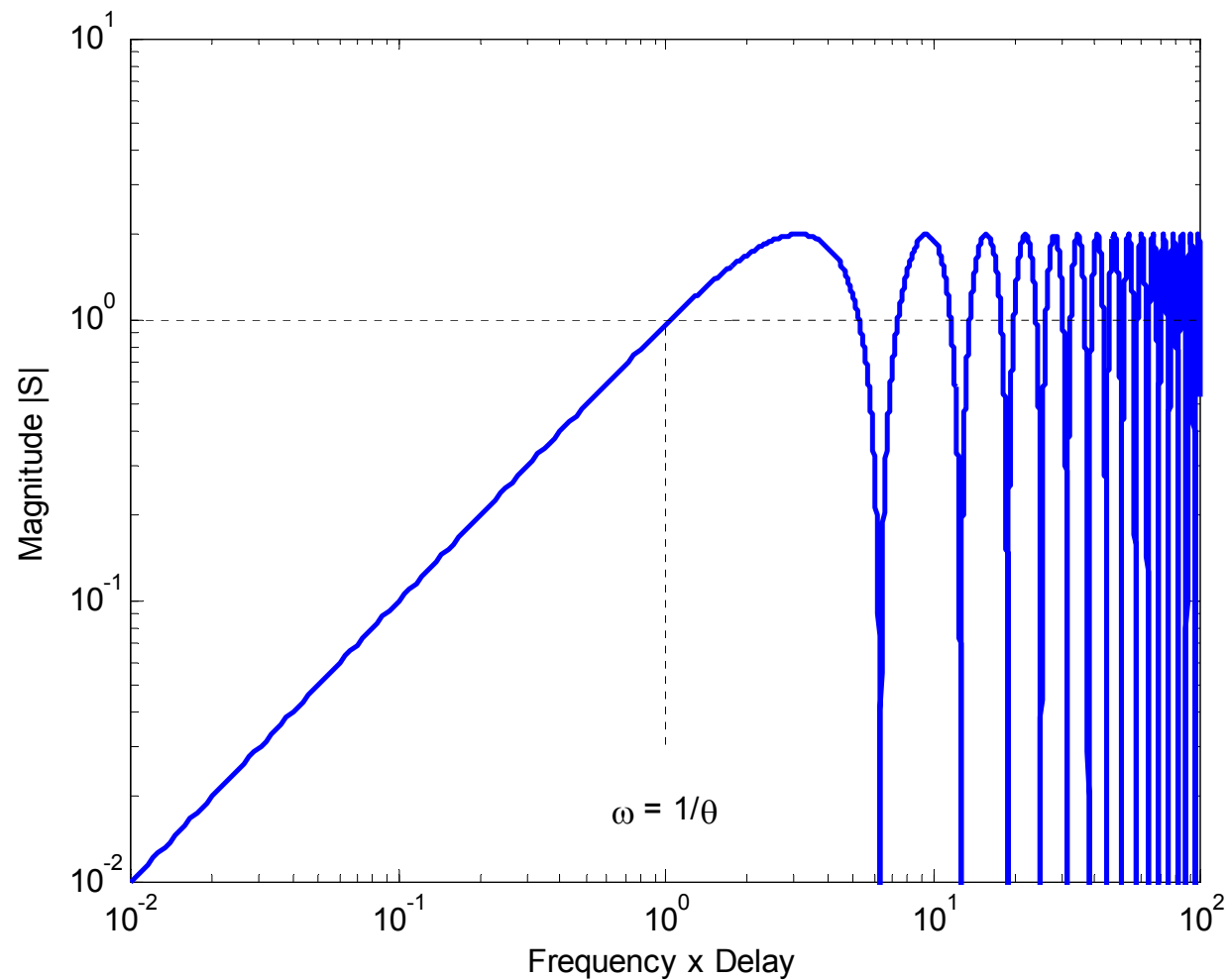
$$S = 1 - T = 1 - e^{-\theta s}$$

- Amplituda $|S|$ je prikazana na sljedećoj slici.
- Na niskim frekvencijama, $\omega\theta < 1$, imamo $1 - e^{-s\theta} \approx \theta s$ (Razvoj funkcije u Taylorov red) i $|S(j\omega)|$ siječe 1 na frekvenciji blizu $1/\theta$ (tačnije $1.05/\theta$).
- Ova frekvencija predstavlja frekvenciju presjeka za L i omogućava računanje aproksimativne gornje granice za ω_c :

$$\omega_c < 1/\theta$$

Ograničenja nametnuta vrem. kašnjenjem

- Idealna funkcija osjetljivosti za sistem s vremenskim kašnjenjem.



Ograničenja nametnuta vrem. kašnjenjem



- **MIMO sistem.** Označimo sa θ_{ij} vremensko kašnjenje u ij elementu matrice $\mathbf{G}(s)$, tada je donja granica na vremensko kašnjenje izlaza i dana najmanjim kašnjenjem u retku matrice $\mathbf{G}(s)$, tj.:

$$\theta_i^{\min} = \min_j \theta_{ij}$$

- Drugim riječima, θ_i^{\min} je minimalno kašnjenje za bilo koji ulaz koji djeluje na izlaz i .
- Promatrajmo sistem:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\theta s} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta = 0 \Rightarrow$ sistem singularan (nije funkcionalno upravljiv) tj. nije moguće upravljati izlazima neovisno.

$\theta > 0 \Rightarrow$ sistem je moguće kvalitetno upravljati jer je propusni opseg $> 1/\theta$.

Veći θ bolje performanse.

Ograničenja nametnuta vrem. kašnjenjem

- Dodatna formulacija: računanje kondicionog broja, odnosno RGA.
- RGA je funkcija frekvencije ω i u ovom slučaju poprima vrijednost 1 za frekvencije veće od $1/\theta$.
- **Primjer 9.** Izračunati funkciju S za proces opisan prethodnim $G(s)$ sa dijagonalnim regulatorom $K = (k/s)I$.
- Koristiti aproksimaciju $e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s$ kako bi se pokazalo da na niskim frekvencijama elementi od $S(s)$ imaju amplitudu $1/(k\theta+2)$.
- Koliki mora biti k da bi se postigle prihvatljive performanse (manje od 10% odstupanja na niskim frekvencijama)?
- Koliki je korespondentni propusni opseg? (Rezultat: $k > 8/\theta$, propusni opseg = k).



Ograničenja nametnuta RHP nulama



- Ograničenje RHP nule z može se izvesti iz ograničenja na otežanu osjetljivost (Teorem 4.):

$$\|w_P \mathcal{S}(s)\|_\infty = \max_{\omega} |w_P(j\omega)| \bar{\sigma}(\mathcal{S}(j\omega)) \geq |w_P(z)|$$

- Najlošiji slučaj odgovara maksimalnoj singularnoj vrijednosti $\bar{\sigma}(\mathcal{S})$.
- Ako se odabere $w_P(s)$ takvo da se zahtijeva kvalitetno upravljanje na niskim frekvencijama i vršna vrijednost od $\sigma(\mathcal{S})$ manja od 2, tada propusni opseg (za najlošiji slučaj) mora za RHP nulu zadovoljavati:

$$\omega_B^* < z/2$$

- Ako želimo kvalitetno upravljanje na visokim frekvencijama tada mora vrijediti: $\omega_B^* > 2z$

Ograničenja nametnuta RHP nulama

Premještanje efekta RHP nula na specifični izlaz

- Rezultat interpolacijskog ograničenja $\mathbf{y}_z^H \mathbf{T}(z) = \mathbf{0}$ nameće određene veze između elemenata unutar svakog stupca od $\mathbf{T}(s)$.
- Stupci matrice $\mathbf{T}(s)$ mogu biti neovisno odabrani.
- **Primjer 10.** Promatrajmo proces:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{(0.2s + 1)(s + 1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 2s & 2 \end{bmatrix}$$

koji ima RHP nulu $s = z = 0.5$.

- Ulazni pravci nula zadovoljavaju $\mathbf{y}_z^H \mathbf{G}(z) = \mathbf{0}$ iz koga slijedi:

$$\mathbf{y}_z = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89 \\ -0.45 \end{bmatrix}$$

Ograničenja nametnuta RHP nulama

- Bilo koji dopustivi $T(s)$ mora zadovoljavati interpolacijsko ograničenje $y_z^H T(z) = \mathbf{0}$ koje nameće sljedeće veze između elemenata stupca od $T(s)$:

$$2t_{11}(z) - t_{21}(z) = 0; \quad 2t_{12}(z) - t_{22}(z) = 0 \quad (*)$$

- Promatramo slijedenje referentnog signala $y = Tr$ i ispitujemo tri slučaja:
 - T_0 – dijagonalna matrica (rasprezanje),
 - T_1 – perfektno upravljanje u odnosu na izlaz 1,
 - T_2 – perfektno upravljanje u odnosu na izlaz 2.
- Napomena: u praksi nije moguće postići perfektno upravljanje, ali zbog jednostavnosti pretpostavljamo da je to slučaj. U sva tri slučaja zahtijevamo perfektno slijedenje u stacionarnom stanju: $T(\mathbf{0}) = I$.

Ograničenja nametnuta RHP nulama

- Kod sinteze postupkom rasprezanja (decoupled design) vrijedi $t_{12}(s) = t_{21}(s) = 0$.
- Da bi se zadovoljili uvjeti (*) mora $t_{11}(z) = 0$ i $t_{22}(z) = 0$, što znači da RHP nula mora biti sadržana u oba dijagonalna elementa.
- Jedan od mogućih izbora koji zadovoljava $T(\mathbf{0}) = I$ je:

$$\mathbf{T}_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s+z}{s+z} & 0 \\ 0 & \frac{-s+z}{s+z} \end{bmatrix}$$

- Za druga dva tipa sinteze sa perfektnim upravljanjem odabiremo:

$$\mathbf{T}_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\beta_1 s}{s+z} & \frac{-s+z}{s+z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s+z}{s+z} & \frac{\beta_2 s}{s+z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ograničenja nametnuta RHP nulama

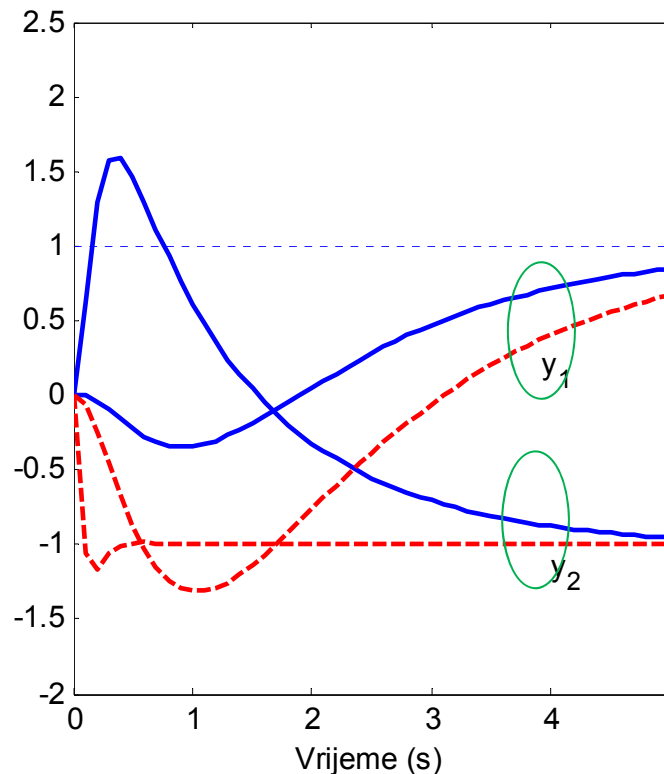
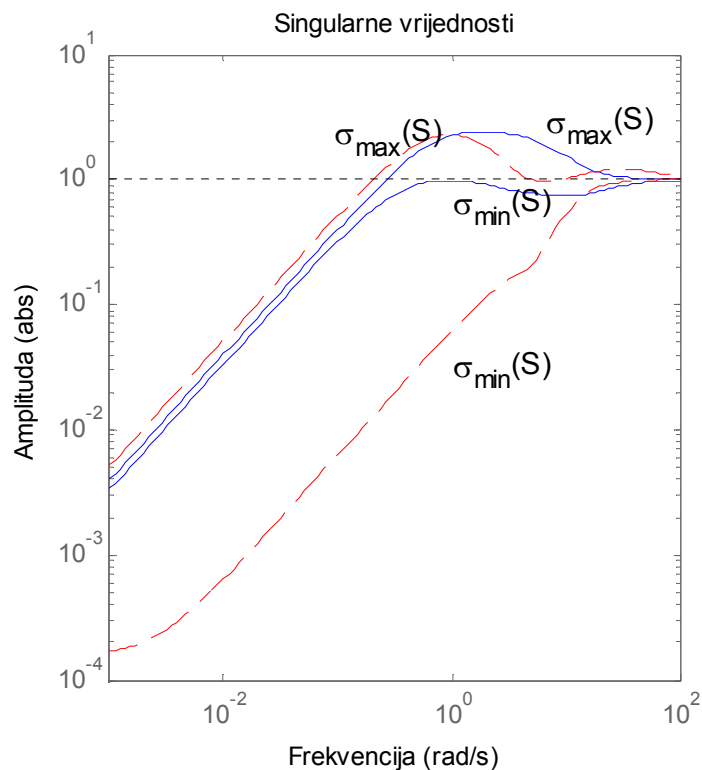
- **Obrazloženje izbora:** izlaz koji nije perfektno upravlján, njegov dijagonalni element mora imati RHP nulu da bi zadovoljio (*) i vandijagonalni elementi moraju imati s u brojniku da bi se dobilo $T(\mathbf{0}) = I$
- Da bi se zadovoljio izraz (*) slijedi da su:
$$\beta_1 = 4, \quad \beta_2 = 1$$
- RHP nula nema utjecaja na izlaz 1 za sintezu $T_1(s)$, kao niti na izlaz 2 kod sinteze $T_2(s)$.
- Prema tome, jasno je da je moguće pomjerati efekt RHP nule na pojedinačni izlaz.
- Međutim, za to se mora platiti odgovarajuća cijena u smislu prihvatanja odgovarajućih interakcija izraženih parametrom β_k .

Ograničenja nametnuta RHP nulama



56/87

- Amplituda interakcije, izražena sa β_k , je većeg iznosa u slučaju kada je izlaz 1. perfektno upravlján.
- Ovo je razumljivo budući da je smjer izlaznog vektora nula $y_z = [0.89 \ -0.45]^T$ određen predominantno izlazom 1.
- Potrebno je platiti “mnogo” da se efekt djelovanja RHP nule premjesti na izlaz 2.



Dizajn 1. – puna linija
Dizajn 2. – isprekidana linija
Odzivi sistema na pobudu $r = [1 \ -1]^T$.
Odzivi nisu kvalitetni i inverzni su jedan u odnosu na drugi.



Ograničenja nametnuta RHP polovima

- U prethodnom primjeru $G(s)$ ima jednu RHP nulu $s = z$, dok $T_0(s)$ ima dvije.
- Za nestabilan proces potrebna je povratna veza za stabilizaciju, tačnije kod prisustva nestabilnog pola p zahtijeva se za internu stabilnost $T(p)y_p = y_p$.
- Kao i kod SISO sistema i za MIMO sisteme vrijede sljedeća ograničenja:
- **RHP-pol ograničenje 1.** Funkcija prijenosa KS izlaza u odnosu na ulaz sistema mora za bilo koji RHP pol p zadovoljavati:

$$\|KS\|_{\infty} \geq \left\| \mathbf{u}_p^H \mathbf{G}_s(p)^{-1} \right\|_2$$

\mathbf{G}_s je stabilna verzija od \mathbf{G} sa RHP polovima u skladu sa Blaschke produktom.

Ograničenja nametnuta RHP polovima

- **RHP-pol ograničenje 2 (propusni opseg).** Iz uvjeta ograničenja:

$$\|w_T(s)T(s)\|_{\infty} \geq |w_T(p)|$$

slijedi da RHP pol p nameće restrikciju na $\sigma(T)$ što je identično kod SISO sistema za $|T|$.

- S obzirom na navedeno potrebno je djelovati dovoljno brzo i mora se zahtijevati da $\sigma(T(j\omega))$ bude oko 1 ili veće do frekvencije $2|p|$.
- **Primjer 11.** Promatrajmo proces $G(s)$:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-z}{s-p} & -\frac{0.1s+1}{s-p} \\ \frac{s-z}{0.1s+1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sa } z = -2.5 \text{ i } p = 2$$

Ograničenja nametnuta RHP polovima

- Proces ima RHP pol $p = 2$ (+ LHP nulu -2.5 koja ne postavlja ograničenja).
- Odgovarajući vektori pravaca ulaza i izlaza pola su:

$$\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} 0.966 \\ -0.258 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- RHP pol p može biti faktoriziran kao $\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}_p(\mathbf{G})\mathbf{G}_s(s)$ gdje su:

$$\mathbf{B}_p(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} \frac{s-p}{s+p} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_s(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2.5}{s+p} & -\frac{0.1s+1}{s+p} \\ \frac{s+2.5}{0.1s+1} & 1 \end{bmatrix}$$



Ograničenja nametnuta RHP polovima

- Korištenjem prethodnih izraza dobiva se:

$$\|KS\|_{\infty} \geq \|u_p^H G_s(p)^{-1}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 0.966 & -0.258 \\ 1.125 & -0.3 \\ 3.75 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right\|_2 = 0.859$$



60/87

RHP polovi kombinirani s RHP nulama



- Kod SISO sistema performanse su slabe ako proces ima RHP pol lociran blizu RHP nule.
- **Kod MIMO sistema ovo je slučaj kada se pravci vektora polova i nula podudaraju.**
- Iz teorema o vršnim vrijednostima osjetljivosti slijedi:

$$\|\mathbf{S}\|_{\infty} \geq \max_{\text{nule } z_j} c_{1j}; \quad \|\mathbf{T}\|_{\infty} \geq \max_{\text{polovi } z_i} c_{2i}; \quad c_1 = c_2 = \sqrt{\sin^2 \phi + \frac{|z+p|^2}{|z-p|^2} \cos^2 \phi}$$

- Za sistem s pojedinačnom RHP nulom z i pojedinačnim RHP polom p vrijedi:

$$\|\mathbf{S}\|_{\infty} \geq c; \quad \|\mathbf{T}\|_{\infty} \geq c; \quad c = \sqrt{\sin^2 \phi + \frac{|z+p|^2}{|z-p|^2} \cos^2 \phi}$$

$$\phi = \cos^{-1} \left| \mathbf{y}_z^H \mathbf{y}_p \right|$$

Ugao između vektora RHP nule i RHP pola

RHP polovi kombinirani s RHP nulama



62/87

- **Primjer 12.** Promatrajmo proces:

$$\mathbf{G}_\alpha(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+p} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{U_\alpha} \begin{bmatrix} \frac{s-z}{0.1s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+z}{0.1s+1} \end{bmatrix}$$

$$z = 2, \quad p = 3$$

koji za sve α ima RHP nulu $z = 2$ i RHP pol $p = 3$.

- Za $\alpha = 0^\circ$ matrica rotacije $U_\alpha = I$ i proces se sastoji od dva raspregnuta podsistema:

$$\mathbf{G}_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-z}{(0.1s+1)(s-p)} & 0 \\ 0 & \frac{s+z}{(0.1s+1)(s+p)} \end{bmatrix}$$

RHP polovi kombinirani s RHP nulama

- Element matrice (g_{11}) ima RHP pol i RHP nulu \Rightarrow očekuju se slabe upravljačke performanse zatvorenog sistema.
- Element matrice g_{22} nema negativan utjecaj na upravljačke performanse.
- Promatramo sada slučaj za $\alpha = 90^\circ$:

$$\mathbf{U}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{90}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s+z}{(0.1s+1)(s-p)} \\ \frac{s-z}{(0.1s+1)(s+p)} & 0 \end{bmatrix}$$

- Raspregnut sistem sa dva vandijagonalna elementa.
- U ovom slučaju nema interakcije između RHP pola i RHP nule \Rightarrow jednostavnije upravljanje procesom.

RHP polovi kombinirani s RHP nulama

- Za međuvrijednosti α (između 0 i 90) sistem neće biti raspregnut i postojat će određena interakcija između RHP pola i RHP nule.
- RHP pol je lociran na izlazu procesa, njegov pravac je fiksiran i pronalazi se da $\mathbf{y}_p = [1 \ 0]^T$ za sve α .
- Pravac izlazne RHP nule mijenja se od $[1 \ 0]^T$ za $\alpha = 0^\circ$ do $[0 \ 1]^T$ za $\alpha = 90^\circ$.
- Ugao ϕ između vektora pola i nule mijenja se između 0° i 90° , pri čemu je $\phi \neq \alpha$.
- Utjecaj promjene α na performanse sistema dan je u sljedećoj tabeli, odnosno odzivima sistema sa H_∞ regulatorom.



RHP polovi kombinirani s RHP nulama

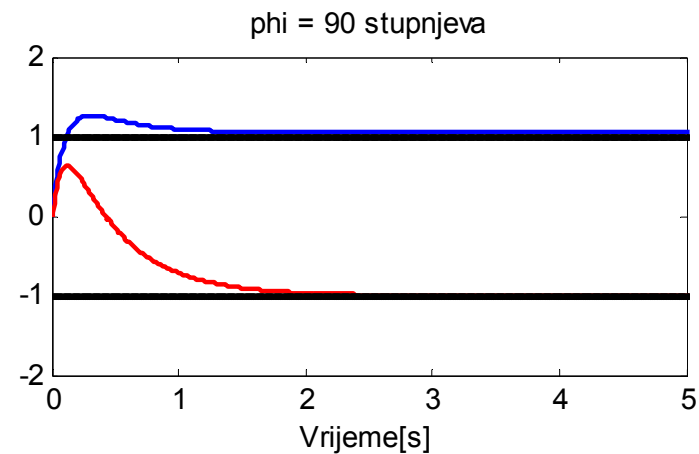
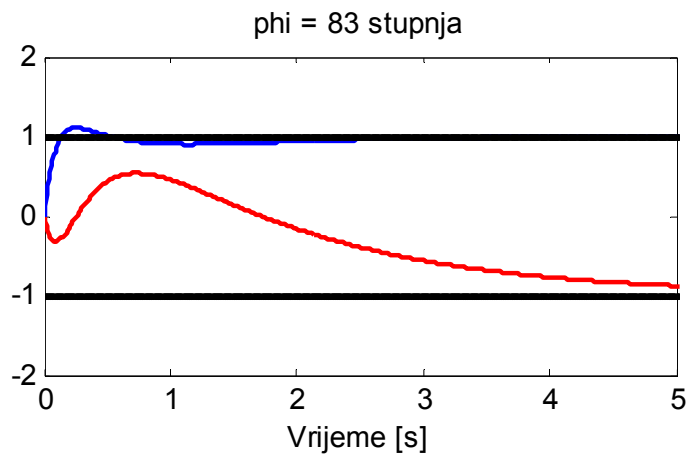
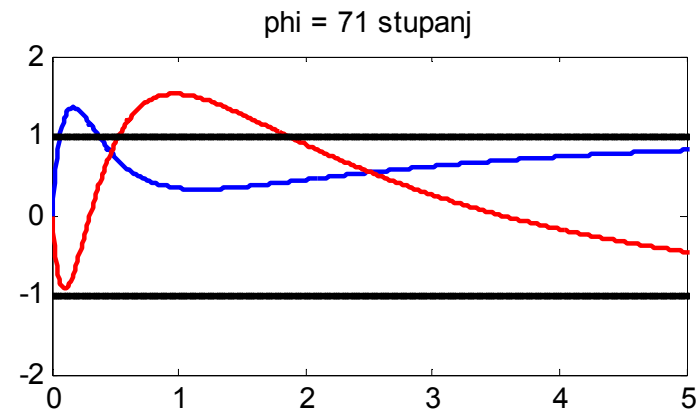
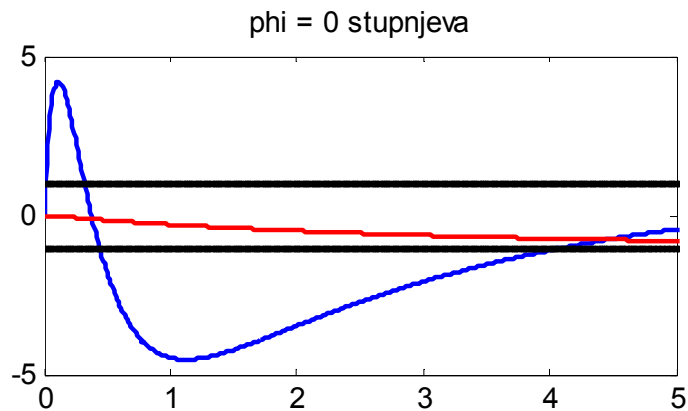
- Utjecaj promjene α na performanse sistema

α	0°	30°	60°	90°
y_z	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.33 \\ -0.94 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.11 \\ -0.99 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\phi = \cos^{-1} y_z^H y_p $	0°	70.9°	83.4°	90°
c	5.0	1.89	1.15	1.0
$\ S\ _\infty$	7.00	2.60	1.59	1.98
$\ T\ _\infty$	7.40	2.76	1.60	1.31
$\gamma(S/KS)$	9.55	3.53	2.01	1.59

- Na sljedećem slajdu dani su odzivi MIMO sistema na referentni signal $r = [-1 \ 1]^T$ sa H_∞ regulatorom za četiri različite vrijednosti ϕ .
- Na odzivima su plavom bojom označeni y_1 , a crvenom y_2 .

RHP polovi kombinirani s RHP nulama

- Odzivi sistema



RHP polovi kombinirani s RHP nulama

Analiza dobivenih rezultata

- Za $\phi = \alpha = 0^\circ$ odziv y_1 je slab, razlog za ovo je blizina RHP pola i RHP nule ($z = 2, p = 3$).
- Za $\phi = \alpha = 90^\circ$ nema interakcije između RHP pola i RHP nule. Odziv y_1 ima nadvišenje, dok je odziv y_2 inverzan zbog postojanja RHP nule.
- Granice $\|\mathcal{S}\|_\infty \geq c; \|\mathcal{T}\|_\infty \geq c$ su čvrste jer imamo samo jednu RHP nulu i jedan RHP pol. Ovo se može provjeriti numerički izborom $W_u = 0.01\mathbf{I}$, $\omega_B^* = 0.01$ i $M = 1$ (prva dva parametra su odabrana mala kako bi se minimizirala vršna vrijednost od \mathcal{S}). Uz zadane parametre dobivaju se za navedene četiri vrijednosti uglova korištenjem H_∞ sinteze: $\|\mathcal{S}\|_\infty = 5.04, 1.905, 1.155, 1.005$
Ove vrijednosti su veoma blizu c -u.



RHP polovi kombinirani s RHP nulama

Analiza dobivenih rezultata

- Ugao ϕ kojeg zatvaraju vektori pola i nule se prilično razlikuje od ugla α između 0° i 90° . Ovo se događa zbog utjecaja RHP pola na izlaz 1. što proizvodi jak utjecaj pojačanja u ovom smjeru, te tendencije potiskivanja vektora pravca nule prema izlazu 2.
- Za $\alpha = 0^\circ$ slijedi $c = 5$ tako da su $\|\mathcal{S}\| \geq 5$ i $\|\mathbf{T}\|_\infty \geq 5$ i praktički je nemoguće postići $\|\mathcal{S}\|_\infty \leq 2$, što je zahtijevano u procesu sinteze regulatora postavljanjem zahtjeva na W_P .
- H_∞ optimalni regulator je nestabilan za $\alpha = 0^\circ$ i $\alpha = 30^\circ$. Ovo nije iznenađujuće, budući da za $\alpha = 0^\circ$ proces postaje skup dva SISO sistema od kojih jedan zahtijeva nestabilan regulator za stabilizaciju budući da je $p > z$.



Zahtjevi na performan. nametnuti smetnjama



- Kod SISO sistema djelovanje smetnji velike amplitude i brzog djelovanja zahtijeva čvrstu (tight) regulaciju i širok propusni opseg.
- Slično je i kod MIMO sistema, s tim da je utjecaj pravca vektora veoma važan.
- Iz izlaza sistema:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{G}_d\mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{e} = \mathbf{S}\mathbf{G}_d\mathbf{d} = \mathbf{S}\mathbf{g}_{d_1}d_1 + \mathbf{S}\mathbf{g}_{d_2}d_2 + \dots$$

gdje su d_i skalarne smetnje, \mathbf{g}_{d_i} (vektor stupac od \mathbf{G}_d) iskazuje djelovanje smetnje na pojedine izlaze sistema.

- Zahtjev na performanse $\|\mathbf{e}(\omega)\|_\infty < 1$ implicira za svaku smetnju:

$$\overline{\sigma}(\mathbf{S}\mathbf{g}_{d_i}) \leq 1 \quad \forall \omega \Leftrightarrow \|\mathbf{S}\mathbf{g}_{d_i}\|_\infty \leq 1$$

Zahtjevi na performan. nametnuti smetnjama



- **Definicija 2.** Vektor pravca djelovanja smetnje definiran je kao:

$$\mathbf{y}_{d_i} = \frac{1}{\|\mathbf{g}_{d_i}\|_\infty} \mathbf{g}_{d_i}$$

- Pridruženi kondicioni broj smetnje definiran je sa:

$$\gamma_d(\mathbf{G}) = \bar{\sigma}(\mathbf{G}) \bar{\sigma}(\mathbf{G}^\diamond \mathbf{y}_{d_i})$$

\mathbf{G}^\diamond - pseudo inverzna matrica od nesingularne matrice \mathbf{G}

- **Kondicioni broj predstavlja mjeru kako je vektor pravca smetnje poravnat sa vektorom pravca procesa.**

Zahtjevi na performan. nametnuti smetnjama



- Na temelju zahtjeva na performanse $\|e(\omega)\|_\infty < 1$:

$$\|\mathbf{S}\mathbf{g}_d\|_2 = \sigma(\mathbf{S}\mathbf{g}_d) < 1 \quad \forall \omega \Leftrightarrow \|\mathbf{S}\mathbf{g}_d\|_\infty < 1$$

- Kombiniranje prethodnih izraza daje:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}\mathbf{y}_d) \leq \frac{1}{\|\mathbf{g}_d\|_2} \quad \forall \omega$$

iz čega slijedi da mora biti $\mathbf{S} < 1/\|\mathbf{g}_d\|_2$ samo u pravcu vektora \mathbf{y}_d .

- Promatrajmo SVD zadane funkcije osjetljivosti:

$$\mathbf{S}\underline{\mathbf{v}} = \underline{\sigma}(\mathbf{S})\underline{\mathbf{u}}; \quad \mathbf{S}\underline{\mathbf{v}} = \underline{\sigma}(\mathbf{S})\underline{\mathbf{u}}$$

Zahtjevi na performan. nametnuti smetnjama



- Vektor pravca smetnje \mathbf{y}_d poravnat sa pravcem vektora najvećeg pojačanja $\bar{\mathbf{u}}$ od \mathcal{S} (pravac u kome proces ima najveće pojačanje):

$$\mathbf{y}_d = \bar{\mathbf{u}} \Rightarrow \bar{\sigma}(\mathcal{S}) \leq \frac{1}{\|\mathbf{g}_d\|_2} \quad \forall \omega$$

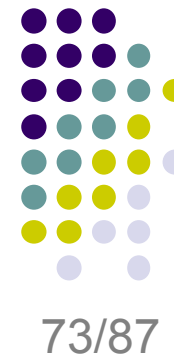
tj. radi se o zahtjevu na $\bar{\sigma}(\mathcal{S})$.

- Vektor pravca smetnje \mathbf{y}_d poravnat sa vektorom pravca najmanjeg pojačanja $\underline{\mathbf{u}}$ od \mathcal{S} :

$$\mathbf{y}_d = \underline{\mathbf{u}} \Rightarrow \underline{\sigma}(\mathcal{S}) \leq \frac{1}{\|\mathbf{g}_d\|_2} \quad \forall \omega$$

tj. radi se o zahtjevu na $\underline{\sigma}(\mathcal{S})$.

Zahtjevi na performan. nametnuti smetnjama



- Ako G ima RHP nulu z tada je:

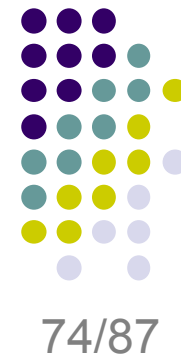
$$\mathbf{y}_z^H \mathbf{S}(z) = \mathbf{y}_z^H \quad \text{i} \quad \|\mathbf{S}\mathbf{g}_d\|_\infty \geq \left| \mathbf{y}_z^H \mathbf{g}_d(z) \right|$$

- Da bi se zadovoljio uvjet $\|\mathbf{S}\mathbf{g}_d\|_\infty < 1$ mora vrijediti:

$$\left| \mathbf{y}_z^H \mathbf{g}_d(z) \right| < 1$$

- Zahtjevi ovise o poravnanju vektora \mathbf{y}_z i \mathbf{y}_d :
 - Ako $\mathbf{y}_z \perp \mathbf{y}_d$ tada $\mathbf{y}_z^H \mathbf{g}_d(z) = \mathbf{0}$, tj. nema interferencije između smetnje i RHP nule.
 - Ako $\mathbf{y}_z \parallel \mathbf{y}_d$ tada $\mathbf{y}_z^H \mathbf{g}_d(z) = \|\mathbf{g}_d(z)\|_2$ i zahtijeva se $\|\mathbf{g}_d(z)\|_2 < 1$ kao kod SISO sistema.

Ograničenja nametnuta ograničenjem ulaza



- Ograničenja na upravljačke varijable mogu limitirati sposobnost odbijanja smetnje i slijeđenja reference.
- Promatramo dva slučaja: **perfektno upravljanje** ($e = \mathbf{0}$) i **prihvatljivo upravljanje** ($\|e\| \leq 1$).
- Kod **perfektnog upravljanja** (perfektno otklanjanje djelovanja smetnje) postavlja se pitanje: “Može li se perfektno otkloniti smetnja uz zadržavanje $\|u\| \leq 1$ “
- Za MIMO sistem imamo:

$$y = Gu + g_d d \quad \stackrel{y=0}{\Rightarrow} \quad u = -G^{-1} g_d d$$

- Uz $\|d_i\| \leq 1 \quad \forall \omega$ (d je skalar) uvjet $\|u(\omega)\| \leq 1 \quad \forall \omega$ implicira:

$$\bar{\sigma}(G^{-1} g_d) < 1 \quad \forall \omega \quad \Rightarrow \quad \|G^{-1} g_d\|_{\infty} < 1$$

Ograničenja nametnuta ograničenjem ulaza



- Kod istovremenog djelovanja smetnji imamo:

$$\left\| \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_d \right\|_{i\infty} \leq 1 \quad \forall \omega$$

- Kod **prihvatljivog upravljanja** promatra se $r = \mathbf{0}$ i promatra odziv $e = \mathbf{G}u + \mathbf{G}_d d$ na smetnju d .
- Pitanje: “Da li je moguće postići $\|e(\omega)\| \leq 1$ za bilo koji $\|d\| \leq 1$ korištenjem ulaza sa $\|u(\omega)\| \leq 1$ ”.
- Postupak je identičan s tim da se ovdje koristi $\|\cdot\|_{\max}$ (vektorska beskonačna norma).
- **Primjer 13.** Promatra se 2 x 2 sistem s dvije smetnje:

$$\mathbf{G} = 0.5 \begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} 7.88 & 8.81 \\ 11.72 & 11.19 \end{bmatrix}$$

Ograničenja nametnuta ograničenjem ulaza

- Elementi matrice \mathbf{G}_d su veći od 1 tako da je potrebna regulacija za otklanjanje djelovanja smetnje.
- Budući da je $\underline{\sigma}(\mathbf{G}) = 0.7$ (dobivena is SVD-a) moguće je postići perfektno slijeđenje promjenjive referentne veličine amplitude 0.7 (u smislu 2-norme) bez dostizanja ulaznih ograničenja.
- Elementi matrice \mathbf{G} su oko 5 puta veći od istih matrice \mathbf{G}_d , što sugerira da nema problema sa ulaznim ograničenjima. S druge strane $\underline{\sigma}(\mathbf{G}) = 0.7$ je mnogo manji od bilo kojeg elementa matrice \mathbf{G}_d , iz čega slijedi da se ulazna ograničenja mogu na kraju primijeniti.
- Kondicion broj smetnje, $\chi_d(\mathbf{G})$, za navedene smetnje iznosi 11.75 i 1.48. Ovo indicira da vektor smetnje 2. ima povoljniji utjecaj na sistem od vektora smetnje 1.



Ograničenja nametnuta ograničenjem ulaza

- Kondicion broj $\gamma(\mathbf{G}) = \bar{\sigma}(\mathbf{G}) / \underline{\sigma}(\mathbf{G}) = 141.7$ je velik, što samo po sebi ne predstavlja problem za upravljanje. U ovom slučaju velik iznos kondicionog broja nije uzrokovan malim iznosom $\underline{\sigma}(\mathbf{G})$, već velikim iznosom $\bar{\sigma}(\mathbf{G})$.
- Za perfektno upravljanje ($e = \mathbf{0}$) ulazi potrebni za perfektno otklanjanje djelovanja smetnji su:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} -1.09 & -0.009 \\ -1.29 & -0.213 \end{bmatrix}$$

- Perfektno otklanjanje smetnje $d_1 = 1$ zahtijeva ulaz $\mathbf{u} = [-1.09 \ -1.29]^T$. Prema tome perfekto upravljanje s ciljem uklanjanja smetnje 1. nije moguće bez narušavanja ulaznih ograničenja.



Ograničenja nametnuta ograničenjem ulaza

- Perfektno otklanjanje smetnje $d_2 = 1$ je moguće jer se zahtijevaju ulazi manjih amplituda $\mathbf{u} = [-0.009 \ -0.213]^T$.



Ograničenja nametnuta neizvjesnostima

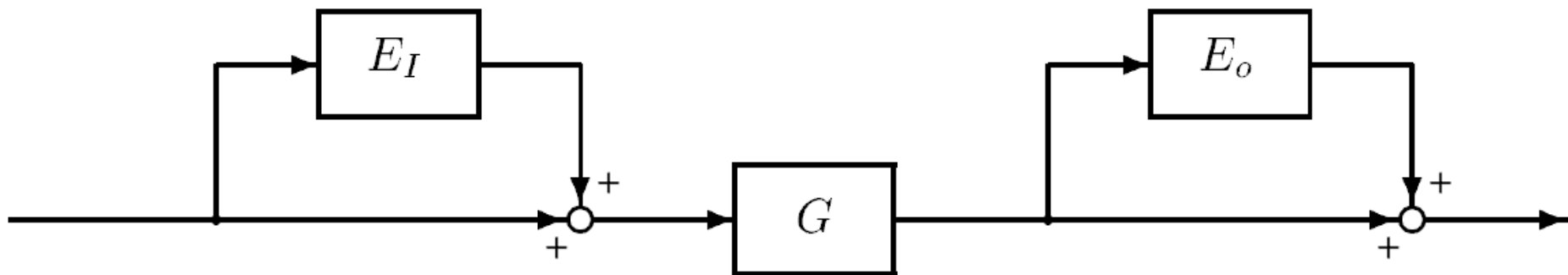
- **Prisustvo neizvjesnosti zahtijeva povratnu vezu.**
- **Redukcija osjetljivosti s obzirom na neizvjesnost postiže se velikim iznosom pojačanja zatvorenog sistema.**
- Međutim, kod realnih sistema postoji područje frekvencije presjeka gdje pojačanje u petlji pada ispod 1 i prisustvo neizvjesnosti u ovom području može prouzročiti slabe performanse ili čak učiniti sistem nestabilnim.
- Navedeno vrijedi kako za SISO, tako i za MIMO sisteme.
- Za MIMO sisteme postoji dodatni problem povezan sa vektorom pravaca procesa.
- **Za analizu utjecaja neizvjesnosti bitni su RGA i kondicioni broj.**



Ograničenja nametnuta neizvjesnostima

Neizvjesnost na ulazu i izlazu sistema

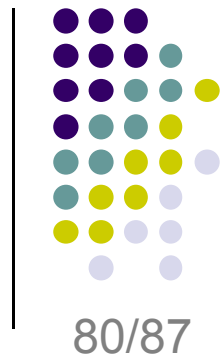
- Multiplikativni oblik



- Neizvjesnost izlaza: $G' = (I + E_O)G$ ili $E_O = (G' - G)G^{-1}$

- Neizvjesnost ulaza: $G' = G(I + E_I)$ ili $E_I = G^{-1}(G' - G)$

- Iako ove neizvjesnosti izgledaju slične, njihov utjecaj na upravljanje može biti veoma različit.





Ograničenja nametnuta neizvjesnostima

- Ako se pretpostavi neovisnost neizvjesnosti u svakom ulazu/izlazu tada su \mathbf{E}_I i \mathbf{E}_O dijagonalne matrice:

$$\mathbf{E}_I = \text{diag}(\varepsilon_i), \quad |\varepsilon_i| < |w_I|$$

ε_i su relativne neizvjesnosti u ulaznoj grani i .

- Tipične vrijednosti ε_i su 0.1 ili veće.
- Fizička interpretacija:

$$\mathbf{u}_{i,\text{implement.}} = \mathbf{u}_{i,\text{izrač}} (1 + |\varepsilon_i|)$$

- Važno je napomenuti da su ulazne dijagonalne neizvjesnosti uvijek prisutne u stvarnim, realnim sistemima zbog postojanja neizvjesnosti u mjerenjima i aktuatorima.

Ograničenja nametnuta neizvjesnostima



82/87

Rasprezanje i ulazna neizvjesnost

- Promatrajmo model procesa: $\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$.
- Primjena raspregnutog upravljanja (decoupling):

$$\mathbf{T}(s) = t(s)\mathbf{I}; \quad \mathbf{S}(s) = (1 - t(s))\mathbf{I}; \quad t(s) = \frac{k(s)}{1 + k(s)}$$

- Pretpostavimo da imamo proces (objekt upravljanja):

$$\mathbf{G}_p = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{E}_I); \quad \mathbf{E}_I = \text{diag}(\varepsilon_i), \quad |\varepsilon_i| < |w_I|$$

- Pojačanje u petlji postaje:

$$\mathbf{G}_p \mathbf{K} = \mathbf{G} \mathbf{K} (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{E}_I \mathbf{G}^{-1})$$

Ograničenja nametnuta neizvjesnostima

- Dijagonalni elementi matrice pogreške (dijagonalna ulazna neizvjesnost:

$$\left[\mathbf{G} \mathbf{E}_I \mathbf{G}^{-1} \right]_{ii} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(\mathbf{G}) \varepsilon_j$$

λ_{ij} su elementi RGA matrice:

$$\text{RGA}(\mathbf{G}) = \Lambda(\mathbf{G}) = \mathbf{G} \times (\mathbf{G}^{-1})^T$$

- Velik iznos $\|\Lambda\|$ implicira jaku ovisnost vektora pravaca o pojačanju sistema.
- Ako RGA elementi procesa poprimaju velike vrijednosti tada nije moguće sa otvorenim sistemom upravljanja postići dobre performanse slijeđenja zbog velike osjetljivosti na dijagonalnu ulaznu neizvjesnost.



Ograničenja nametnuta neizvjesnostima

- Za zatvoreni sistem imamo:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}_p) \geq \bar{\sigma}(\mathbf{S}) \left(1 + \frac{|w_{It}|}{|w_{It}|} \|\mathbf{A}(\mathbf{G})\|_{i\infty} \right)$$

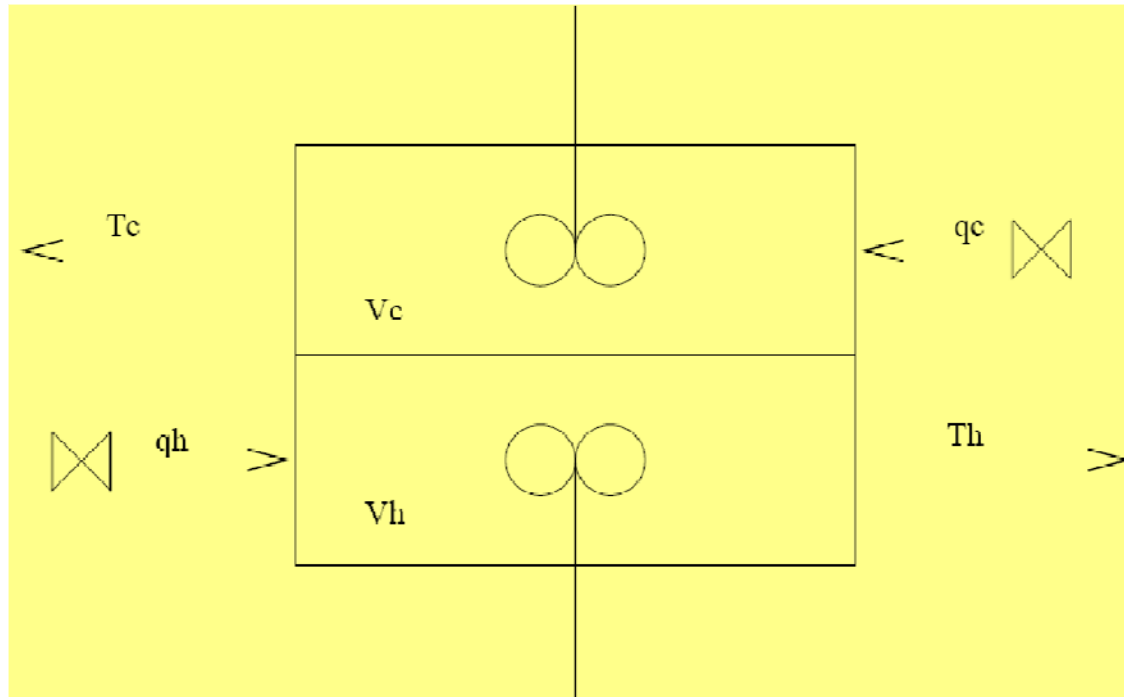
gdje je $\|\cdot\|_{i\infty}$ maksimalna suma retka.

- Pojačanje petlje za MIMO procese jako ovise o neizvjesnosti ulaza kada je $\|\mathbf{A}\|_{i\infty} \gg 1$ i nastojimo kompenzirati jaku ovisnost o pravcima kod regulatora, odnosno \mathbf{K} mora biti odabran da zadovolji kompromis između performansi i robusnosti.



Ograničenja nametnuta neizvjesnostima

Primjer 14. Izmjenjivač zraka



85/87

- Model procesa:
$$\begin{bmatrix} T_c \\ T_h \end{bmatrix} = \frac{1}{1+100s} \begin{bmatrix} -18.74 & 17.85 \\ -17.85 & 18.74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ q_h \end{bmatrix}$$
- Problem: regulirati temperature T_c i T_h pomoću protoka q_c i q_h .

Ograničenja nametnuta neizvjesnostima



86/87

- Računanje RGA:

$$\Lambda(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1 - \lambda_{11} \\ 1 - \lambda_{11} & \lambda_{11} \end{bmatrix}; \quad \lambda_{11} = \frac{1}{1 - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}}$$

- U ovom primjeru su elementi matrice \mathbf{G} jednaki:

$$g_{11} = -18.74, \quad g_{12} = 17.85$$

$$g_{21} = -17.85, \quad g_{22} = 18.74$$

- Slijedi da elementi matrice Λ poprimaju sljedeće vrijednosti:

$$\lambda_{11} = 10.78, \quad \lambda_{12} = -9.78$$

$$\lambda_{21} = -9.78, \quad \lambda_{22} = 10.78$$

Ograničenja nametnuta neizvjesnostima

- RGA:

$$\mathcal{A}(G(j\omega)) = \begin{bmatrix} 10.78 & -9.78 \\ -9.78 & 10.78 \end{bmatrix} \Rightarrow \|\mathcal{A}\|_{i\infty} = 20.6$$

objašnjava osjetljivost na ulaznu neizvjesnost sa rasprezanjem (decoupler).

